

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ И ЕЕ КОМПЬЮТЕРНАЯ СИМУЛЯЦИЯ*

ДАВРИШОВА И.Н.

²Азербайджанский Технический Университет, Баку, Азербайджан
e-mail: irada.davrishova@gmail.com

Аннотация. Обоснована актуальность проблемы и сформулирована постановка задачи. Используя математические методы измерительной техники и теории пьезоэлектричества, составлена математическая модель преобразователя электрической энергии с учетом измеряемой величины- влияний механических воздействий. Полученная математическая модель, отличительная особенность которой заключается в том, что в нее входят только электрофизические и геометрические параметры пьезоэлектрических чувствительных элементов с дифференциальным соединением, рассмотрена как функциональная зависимость между выходным электрическим сигналом и входным относительным сигналом механического воздействия. На основе результатов компьютерной симуляции составленной модели, сделаны необходимые выводы и сформулировано заключение.

Ключевые слова: математическая модель, преобразователь электрической энергии, пьезоэлектрические чувствительные элементы, параметры схемы замещения, статические характеристики, нелинейность резонансного режима.

MS Subject Classification: 26A06.

1. Введение.

При применении методов прикладной механики с целью исследования технических устройств и систем, одним из первых этапов является разработка или выбор математической модели [1]. Именно с помощью математической модели исследователи пытаются осветить некоторые проблемы, связанные либо с выбором материалов основных составных частей конструкции, оптимального варианта самого конструкционного исполнения, с поиском необходимых соотношений значений тех или иных размеров и массогабаритных показателей, либо связанных с повышением качества их работы, с улучшением показателей технико-эксплуатационных параметров и т.п.

Значимость математических моделей, согласно [2], заключается также и в том, что они однозначно и напрямую показывают взаимосвязь между

* The work was presented at the webinar of the Institute of Applied Mathematics 28.09.2021

математикой и другими отраслями науки и техники, с учетом существующей уже огромной практики по исследуемой проблеме. Следует, также отметить, что составленная математическая модель полностью раскрывает характерные особенности работы математика-прикладника, его способность по использованию математических методов для моделирования технических устройств и систем. Так как результаты, полученные после компьютерной симуляции созданной математической модели так или иначе определяют достоверность модели и вместе с ней то, насколько достаточно был изучен исследуемый объект, учтены конкретные факты, определяемые из существующей практики.

Применительно, к техническим устройствам, существует огромная практика по математическому моделированию электромеханических преобразователей - как приводных машин, так и источников первичной информации- датчиков. Ниже приводятся характерные особенности существующей практики по математическому моделированию пьезоэлектрических преобразователей. Но, перед этим необходимо напомнить, что пьезоэлектрические преобразователи, как технические устройства создаются на основе пьезоэлектрических материалов и элементов, одноименное свойство, которых обусловлено тем, что в них под действием внешних механических воздействий вырабатывается электрическая энергия и наоборот- при подаче электрического напряжения на выделенные поверхности элемента, у них возникают механические колебания. Что касается областей применения пьезоэлектрических преобразователей - это разнообразные научно- технические отрасли: от микротехнологии, до макроструктур промышленного [1-3], транспортного, медицинского назначения [11].

В статье [9] обсуждены вопросы быстрого и эффективного моделирования пьезоэлектрических устройств одновременно в режиме передатчика и приёмника, с помощью программного обеспечения COMSOL Multiphysics, а в работе [10, 14] систематизированы материалы по компьютерному моделированию пьезоэлектрических устройств по методу конечных элементов в вычислительном комплексе ANSYS, с целью поддержки курса «Компьютерное моделирование в пьезоэлектрическом приборостроении», предназначенного для студентов – аспирантов. Подтверждая бесспорную своеобразную значимость этих работ по насыщению существующей практики по математическому моделированию пьезоэлектрических преобразователей, автор, также обращает внимание на тот факт, что поставленные проблемы и решенные задачи в этих работах не связаны с работой измерительных пьезоэлектрических преобразователей и при составлении математических моделей не использовались схемы замещения. Этими фактами и обуславливается невозможность применения этих моделей для исследования статических характеристик измерительных пьезоэлектрических преобразователей.

В отличие от моделей, построенных в вышеупомянутых работах, математическая модель, представленная на работе [13], построена на основе электрической схемы замещения. Но, выбранная схема замещения не представляет собой схему с дифференциальным соединением пьезоэлектрических чувствительных элементов. Помимо этого, в работе рассмотрены только частотные характеристики для разных резонансных мод и не рассмотрены влияния физических и геометрических параметров пьезоэлектрических элементов на ее внешние рабочие характеристики.

В представленной статье составлена статическая математическая модель пьезоэлектрического преобразователя с дифференциальным соединением чувствительных элементов для измерения параметров механического движения. На основе составленной модели выявлен характер влияния изменения физико-геометрических свойств на выходной сигнал преобразователя.

2. Постановка задачи.

В работе [10] рассмотрены вопросы нормализации коэффициентов характеристического уравнения передаточной функции исследуемого пьезоэлектрического преобразователя. Электрические схемы замещения, на основе которой составлена динамическая модель приведены на рис. 1.

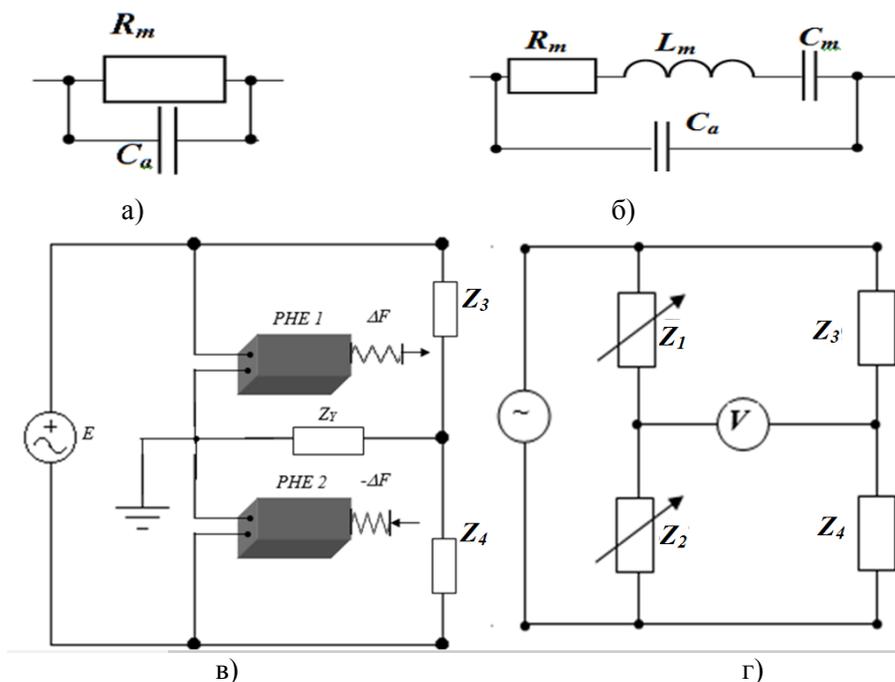


Рис1. Электрические схемы а) пьезочувствительного элемента при резонансе;

б) в общем виде; в) мостовая схема с дифференциальным соединением чувствительных элементов ($PHE1, PHE2$); г) электрическая схема замещения пьезоэлектрического измерительного преобразователя.

Сохраняя основные первоначальные принципы и условия, здесь также, для составления статической модели использованы электрические схемы замещения, приведенные на рис. 1а, б и г:

Сопrotивления плеч в исходном состоянии измерительного преобразователя:

$$Z_{10} = Z_{20} = Z_3 = Z_4 = Z_0 \quad . \quad (1)$$

Сопrotивление нагрузки очень большое: $Z_Y = \infty$ и поэтому в схеме замещения 1г его заменяем вольтметром. Если обозначить с ΔZ изменение сопротивления плеч с пьезоэлектрическими чувствительными элементами, под влиянием изменения их физико-геометрических показателей, при условии линейности изменения можно написать:

$$Z_1 = Z_0 + \Delta Z; Z_2 = Z_0 - \Delta Z \quad . \quad (2)$$

Согласно литературе, посвященной электрическим измерениям, например [6 с. 191, 12], выражение для выходного напряжения измерительного моста (Рис.1г):

$$U = \frac{Z_1 Z_4 - Z_2 Z_3}{(Z_1 + Z_2)(Z_3 + Z_4)} E \quad . \quad (3)$$

Как известно, электрические мосты имеют два состояния: уравновешенное состояние, при котором в представленном случае: $Z_{10} = Z_{20} = Z_3 = Z_4 = Z_0$; $U = 0$ и неуравновешенное состояние, при котором: $Z_1 = Z_0 + \Delta Z$; $Z_2 = Z_0 - \Delta Z$ и напряжение :

$$U = \frac{Z_0(Z_0 + \Delta Z) - Z_0(Z_0 - \Delta Z)}{(Z_0 + \Delta Z + Z_0 - \Delta Z)(Z_0 + Z_0)} E \quad , \quad (4)$$

или:

$$U = 0,5 \frac{E}{Z_0} \Delta Z \quad , \quad (5)$$

Целью статьи является следующее: на основе уравнения (5) построить статическую модель пьезоэлектрического измерительного преобразователя, с дифференциальным соединением чувствительных элементов, позволяющей провести теоретические исследования характера изменения выходного сигнала (выходной сигнал измерений) в зависимости от их физико-геометрических параметров. Иными словами, на основе уравнения (5), необходимо построить математическую формулу:

$$U = 0,5 \frac{E}{Z_0} \Delta Z; \quad , \quad (6)$$

$$\frac{\Delta Z}{Z_0} = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \quad (7)$$

Здесь $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ - физико-геометрические параметры пьезоэлектрических чувствительных элементов.

3. Решение задачи.

На основе рис.1а и 1б для Z_0 и Z можно написать:

$$Z_0(j\omega) = \frac{R_m(-jX_a)}{R_m - jX_a}, \quad (8)$$

$$Z(j\omega) = \frac{(R_m - jX_{\Delta m})(-jX_a)}{R_m - j(X_a + X_{\Delta m})}. \quad (9)$$

Очевидно, что (8) сопротивление плеча, когда установлен резонансный режим: $X_{Cm} = X_{Lm}$, (9) соответствует общему состоянию:

$$Z(j\omega) = \frac{(R_m + j(X_{Lm} - X_m))(-jX_a)}{R_m + j(X_{Lm} - X_m - X_a)}. \quad (10)$$

Если предположить, что: $X_{Lm} - (X_{Cm} + X_{\Delta m}) = (X_{Lm} - X_{Cm}) - X_{\Delta m} = -X_{\Delta m}$, тогда легко можно сказать, что (9) выражает емкостный характер изменения комплексного сопротивления чувствительного элемента, выводящий схему из резонансного состояния:

$$\Delta Z(j\omega) = Z(j\omega) - Z_0(j\omega) = \frac{(R_m - jX_{\Delta m})(-jX_a)}{R_m - j(X_a + X_{\Delta m})} - \frac{R_m(-jX_a)}{R_m - jX_a}, \quad (11)$$

Модульные значения сопротивлений равны соответственно:

$$Z_0 = \frac{R_m X_a}{\sqrt{R_m^2 + X_a^2}}, \quad (12)$$

$$Z = \frac{\sqrt{(R_m^2 X_a^2)^2 + (R_m^2 X_a - X_a X_{\Delta m}(X_a + X_{\Delta m}))^2}}{R_m^2 + (X_a + X_{\Delta m})^2}, \quad (13)$$

$$\Delta Z = \frac{X_a^2 X_{\Delta m}}{R_m^2 + X_a^2}, \quad (14)$$

Выражение (14) получено с условием: $X_a \gg X_{\Delta m}$.

Наконец, после подстановки (12), (14) в (5) и выполнения несложных арифметических операции получаем:

$$U = 0,5E \frac{X_a X_{\Delta m}}{R_m \sqrt{R_m^2 + X_a^2}}, \quad (15)$$

Выражение (15) необходимо рассматривать как функцию:

$U = K_{PU} X_{\Delta m}$, в котором:

$$K_{PU} = \frac{0,5EX_a}{R_m \sqrt{R_m^2 + X_a^2}} \quad (16)$$

коэффициент передачи измерительного моста с дифференциальным соединением пьезоэлектрических чувствительных элементов.

Как известно из электротехники, реактивное сопротивление емкостного характера определяется частотой напряжения питания и емкостью конденсатора и численно равно обратному значению их произведения.

Тогда для X_a и $X_{\Delta m}$ можно написать:

$$X_a = \frac{1}{2\pi f C_a}; \quad X_{\Delta m} = \frac{1}{2\pi f \Delta C}; \quad (17)$$

С учетом выражений (17), выражения (15) и (16) можно написать в следующих формах:

$$U = \frac{0,25}{\pi} \frac{E}{R_m f \sqrt{(2\pi f C_a R_m)^2 + 1}} \frac{1}{\Delta C}, \quad (18)$$

$$K_{PU} = \frac{0,25}{\pi} \frac{E}{R_m f \sqrt{(2\pi f C_a R_m)^2 + 1}}, \quad (19)$$

С целью определения второй части (7) воспользуемся уравнениями, которые приведены в литературе [5]:

$$\Delta C_m = \frac{8\pi^2}{(n\pi)^2} \frac{(d_{13})^2}{S_{33}^E} \frac{1}{\Delta h}; \quad R_m = \rho \frac{(n\pi)^2}{8\pi^2} \frac{(S_{33}^E)^2}{(d_{13})^2} h_0; \quad C_a = \varepsilon_{11}^s \pi r^2 \frac{1}{h_0}, \quad (20)$$

при этом резонансная частота (в Гц.-ах) схемы замещения определится формулой :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{L_m C_m}}$$

$$f_0 = \frac{n}{2h_0 \sqrt{\rho S_{33}^E}} . \quad (21)$$

Здесь r , h_0 - радиус и толщина соответственно, пьезоэлектрического чувствительного элемента дисковой формы; Δh - изменение толщины под действием внешнего воздействия; ρ - плотность пьезоэлектрического материала; n - порядковый номер моды; S_{33}^E - коэффициент упругой податливости; ε_{11} - относительная диэлектрическая проницаемость; d_{13} - пьезоэлектрический модуль.

Подставим уравнения (20) для $R_m, \Delta C_m, C_a$ в (18) и получим:

$$U = \frac{r^2 E}{32 \rho S_{33}^E f_0 \sqrt{1 + \left(\frac{0,25 \pi^3 \rho f_0 \varepsilon_{11}^s (S_{33}^E)^2}{(d_{13})^2} \right)^2}} \frac{\Delta h}{h_0} , \quad (22)$$

в котором:

$$K_{PU} = \frac{r^2 E}{32 \rho S_{33}^E f_0 \sqrt{1 + \left(\frac{0,25 \pi^3 \rho f_0 \varepsilon_{11}^s (S_{33}^E)^2}{(d_{13})^2} \right)^2}} . \quad (23)$$

Известно, что чувствительность математической форме есть производное выходного сигнала от входного. Как видно из (22), если за входное сигнал принять относительное изменение толщины- $\varepsilon_h = \Delta h/h_0$, то это выражение является линейной функцией- $U = K_{PU} \varepsilon_h$, коэффициент чувствительности K_{PU} определится выражением (23).

На рис. 2 представлена компьютерная модель, построенная на основе уравнений (15)-(22) в программной среде МАТЛАБ.

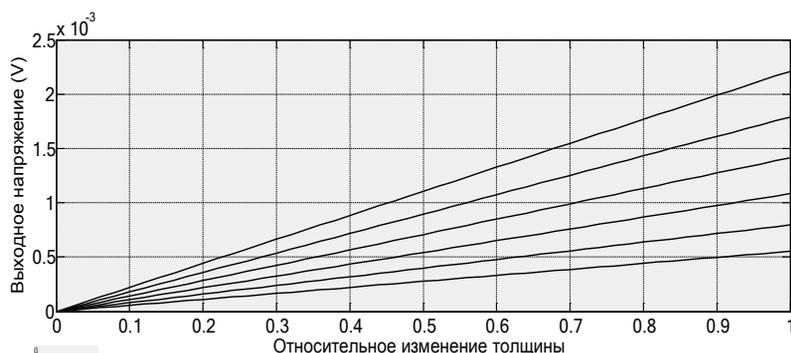


Рис 4. Статические характеристики пьезоэлектрического преобразователя при разных значениях радиуса пьезоэлектрического элемента в форме диска r [0.005:0.001:0.01]

Согласно (21) теоретически выходной сигнал в обоих случаях должен был измениться по нелинейному закону. Хотя, графики представленные на рис.3 и 4 несильно отличаются от прямых линий, в них, пусть даже в малых значениях, но все же присутствуют нелинейные составляющие.

Заключение. Результаты, полученные от симуляции составленной статической математической модели пьезоэлектрического преобразователя с дифференциальным соединением чувствительных элементов по мостовой схеме, показали, что при рассмотрении измерительного процесса как зависимость выходного сигнала от относительного значения входного сигнала, статическая чувствительность является постоянной величиной и нелинейности, образованные от влияния изменения геометрических параметров пьезочувствительных элементов, настолько малы, что ими можно пренебречь.

Литература

1. Aliev F.A., Methods to Solve Applied Problems of Optimization of Dynamic System, Elm, Baku, 1989
2. Aliev F.A., Larin V.B. Optimization of Linear Control Systems: Analytical Methods and Computational Algorithms, Amsterdam: Gordon and Breach Sci, 1998, 272 p.
3. Larin, V.B. Management of walking devices, Kiev, 1980
4. Jordi-Lluís Figueras Applied Mathematics. 2014, 70p
5. http://www2.math.uu.se/~figueras/teaching/contents_course/2014_Fall_Applied_Mathematics/Applied_math.pdf
6. Аюпов, В.В. Прикладная математика : учебное пособие / В.В. Аюпов, А.В. Аюпов; Министерство сельского хозяйства РФ; федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Пермская государственная

- сельско-хозяйственная академия имени академика Д. Н. Прянишникова». Пермь : ИПЦ «Прокрость», 2017, 147 с.
7. Байда Л.И., Добротворский Н.С., Душин Е.М. Электрические измерения , под ред. А.В. Фремке, Душина Е.М. Л.:Энергия, 1980, 392 с.
 8. Давришова И.Н., Нейматов В.А. Нормализация динамических характеристик пьезоэлектрического датчика угла поворота. Вестник НАНА серия «Математика и Физика-технология. Проблемы информатики и управления». (на азербайджанском языке) 2016,Т.36, N.6. с. 97-103
 9. Зеленка И. Пьезоэлектрические резонаторы на объемных и поверхностных акустических волнах: Материалы, технология, конструкции, применение. Пер. с чешск. М., Мир, 1990. 548 с.
 10. Моделирование пьезоэлектрических устройств одновременно в режиме передатчика и приёмника. <https://www.comsol.ru/blogs/how-to-model-piezoelectric-devices-as-both-transmitters-and-receivers/>
 11. Наседкин А.В. Моделирование пьезоэлектрических преобразователей в ANSYS: учебное пособие / А.В. Наседкин ; Южный федеральный университет. Ростов-на-Дону: издательство Южного федерального университета, 2015, 176 с.
 12. Область применения пьезоэлектрических преобразователей. https://studwood.ru/1647250/matematika_himiya_fizika/oblast_primeneniya_pezoelektricheskikh_preobrazovateley
 13. Панфилов В.А. Электрические измерения /В.А. Панфилов 8-ое изд., М.: Академия, 2013. – 288 с.ISBN 978.-5-7695-9720-6
 14. Рикконен С.В., Пономарев С.В., Азин А.В. Моделирование колебательных процессов пьезоэлектрического преобразователя. Вестник томского государственного университета Математика и механика. № 2(34), с. 87-94. 2015
 15. Рыбьянец А. Н., Наседкин А. В., Щербинин С. А., Петрова Е. И., Швецова Н. А. , И. А. Швецов, М. А. Луговая. Конечно-элементное моделирование низкочастотных биморфных преобразователей для диагностики и активации нефтяных скважин. Акустический журнал. том 63. № 6. Москва, МГУ им. Ломоносова, 2017, с. 685-691.

DEVELOPMENT OF A MATHEMATICAL MODEL OF A DIFFERENTIAL PIEZOELECTRIC CONVERTER AND ITS COMPUTER SIMULATION

DAVRISHOVA I. N.

Abstract. The urgency of the problem is justified and the problem statement is formulated. Using mathematical methods of measuring technology and the theory of piezoelectricity, a mathematical model of an electric energy converter is compiled taking into account the measured value - the effects of mechanical influences. The resulting mathematical model, the distinctive feature of which is that it includes only the

electrophysical and geometric parameters of piezoelectric sensing elements with a differential connection, is considered as a functional dependence between the output electrical signal and the input relative signal of mechanical action. Based on the results of computer simulation of the compiled model, the necessary conclusions are drawn and a conclusion is formulated.

Keywords: mathematical model, electric energy converter, piezoelectric sensing elements, parameters of the substitution circuit, static characteristics, nonlinearity of the resonant mode.

REFERENCES

1. Aliev F.A., Methods to Solve Applied Problems of Optimization of Dynamic System, Élm, Baku,1989
2. Aliev F.A., Larin V.B. Optimization of Linear Control Systems: Analytical Methods and Computational ,Algorithms ,Amsterdam: Gordon and Breach Sci,1998, 272 p.
3. Larin, V.B. Management of walking devices, Kiev, 1980
4. Jordi-Llu'is Figueras Applied Mathematics. 2014, 70p
http://www2.math.uu.se/~figueras/teaching/contents_course/2014_Fall_Applied_Mathematics/Applied_math.pdf
5. Ayupov, V.V. Prikladnaya matematika : uchebnoe posobie / V.V. Ayupov, A.V. Ayupov; Ministerstvo sel'skogo khozyaystva RF; federal'noe gosudarstvennoe .byudzhethoe obrazovatel'noe uchrezhdenie vysshego obrazovaniya «Permskaya gosudarstvennaya sel'sko-khozyaystvennaya akademiya imeni akademika D. N. Pryanishnikova». Perm' : IPTs «Prokrost"», 2017, 147 s (Applied Mathematics : textbook / V.V. Ayupov, A.V. Ayupov; Ministry of Agriculture of the Russian Federation; Federal State .budgetary educational institution of higher education "Perm State Agricultural Academy named after Academician D. N. Pryanishnikov". Perm : Publishing house "Prokrost", 2017, 147 p.)
6. Bayda L.I., Dobrotvorskiy N.S., Dushin E.M. i dr. Elektricheskie izmereniya / pod red. A.V. Fremke, Dushina E.M. – L.: Energiya, 1980, 392 s. (Bayda L.I., Dushin E.M., etc. Electrical measurements / ed . A.V. Fremke, Dushina E.M. - L.: Energiya, 1980, 392 p.).
7. Davrishova I.N., Neymatov V.A. Normalizatsiya dinamicheskikh kharakteristik p'ezoelektricheskogo datchika ugla povorota. Vestnik NANA Nauchnaya seriya «Matematika i Fizika-tehnologiya. Problemy informatiki i upravleniya». (in Azerbaijan)) T.36, N. 6. Bakı 2016, s. 97-103 (Davrishova I.N., Neymatov V.A. Normalization of dynamic characteristics of piezoelectric rotation angle sensor. Bulletin of the NANA Scientific series "Mathematics and Physics-technology. Problems of computer science and management". (in Azerbaijani) Volume 36, No. 6. Baku 2016, pp. 97-103)

8. Zelenka I. P'ezoelektricheskie rezonatory na ob'emnykh i poverkhnostnykh akusticheskikh volnakh: Materialy, tekhnologiya, konstruksii, primenenie. Per. s cheshsk. M., Mir, 1990. 548 s. (Zelenka I. Piezoelectric resonators on volumetric and surface acoustic waves: Materials, technology, designs, application. Trans. from Czech. M., Mir, 1990. 548 p.).
9. Modelirovanie p'ezoelektricheskikh ustroystv odnovremenno v rezhime peredatchika i priemnika. (Simulation of piezoelectric devices simultaneously in the transmitter and receiver mode).
<https://www.comsol.ru/blogs/how-to-model-piezoelectric-devices-as-both-transmitters-and-receivers/>
10. Nasedkin A.V. Modelirovanie p'ezoelektricheskikh preobrazovateley v ANSYS: uchebnoe posobie ,A.V. Nasedkin ; Yuzhnyy federal'nyy universitet. Rostov-na-Donu: izdatel'stvo Yuzhnogo federal'nogo universiteta, 2015, 176 s (Nasedkin A.V. Modeling of piezoelectric converters in ANSYS: textbook A.V. Nasedkin ; Southern Federal University. Rostov-on-Don: Southern Federal University Press, 2015, 176 p).
11. Oblast' primeneniya p'ezoelektricheskikh preobrazovateley (Scope of application of piezoelectric converters).
https://studwood.ru/1647250/matematika_himiya_fizika/oblast_primeneniya_pezoelektricheskikh_preobrazovateley
12. Panfilov V.A. Elektricheskie izmereniya , Panfilov V.A. 8-oe izd., M.: Akademiya, 2013, 288s.ISBN 978.-5-7695-9720-6 (Panfilov V.A. Electrical measurements ,V.A. Panfilov 8th ed., Moscow: Akademiya, 2013, 288 p)
13. Rikkonen S.V., Ponomarev S.V., Azin A.V. Modelirovanie kolebatel'nykh protsessov p'ezoelektricheskogo preobrazovatelya. Vestnik tomского gosudarstvennogo universiteta Matematika i mekhanika. № 2(34), s. 87-94. 2015, c. 87-94 (Rikkonen S.V., Ponomarev S.V., Azin A.V. Modeling of oscillatory processes of a piezoelectric converter. Bulletin of Tomsk State University of Mathematics and Mechanics. No. 2(34), 2015, pp. 87-94.)
14. Rybyanets A. N., Nasedkin A. V., Shcherbinin S. A., Petrova E. I., Shvetsova N. A. , I. A. Shvetsov, M. A. Lugovaya. Konechno-elementnoe modelirovanie nizkochastotnykh bimorfnykh preobrazovateley dlya diagnostiki i aktivatsii neftyanykh skvazhin. Akusticheskij zhurnal. tom 63. № 6. Moskva, MGU im. Lomonosova, 2017, s. 685-691 (Rybyanets A. N., Nasedkin A.V., Shcherbinin S. A., Petrova E. I., Shvetsova N. A. , I. A. Shvetsov, M. A. Lugovaya. Finite element modeling of low-frequency bimorphic converters for diagnostics and activation of oil wells. Acoustic magazine. Volume 63. No. 6. Moscow, Lomonosov Moscow State University, 2017, pp. 685-691.).